

Параллелизм в прямых методах решения систем линейных уравнений

(Занятие 5)

Игорь Николаевич Коньшин

МГУ - 04.07.2012

Прямые методы решения СЛАУ

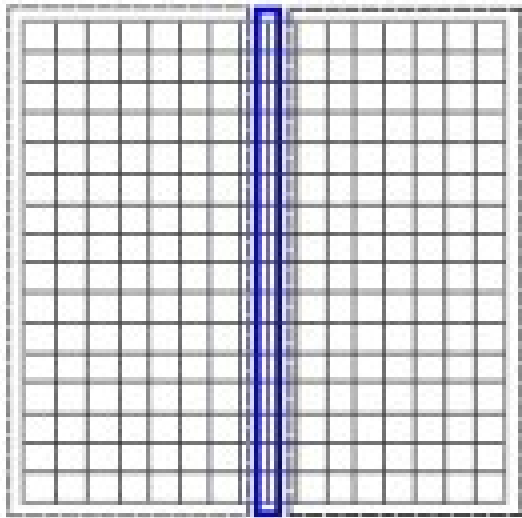
$$A x = b$$

- Исключение Гаусса → Треугольное разложение: $A = L U$
- Если матрица плотная – то все известно (тест Linpack).
Будем считать, что A – разреженная.
- *Ни в коем случае не вычислять в явном виде обратную к матрице A , т.к. умножить на нее - это затраты $n*n$. Мы же надеемся решить быстрее.*

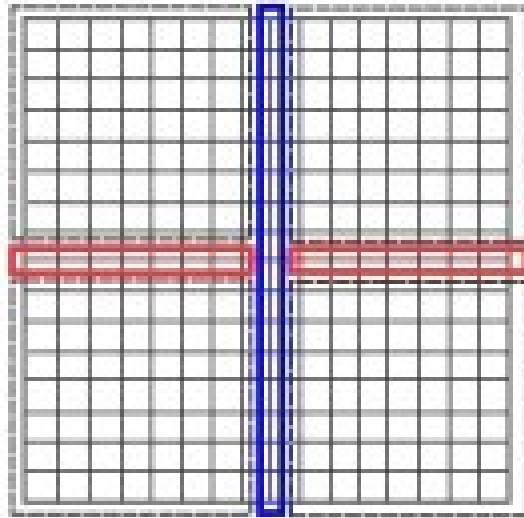
Минимизация заполнения

- Новые ненулевые элементы (fill-ing)
- Симметричные перестановки:
 - RCM – Reverse Cuthill McKee
 - AMD – Approximate Minimum Degree
 - ND – Nested Dissection

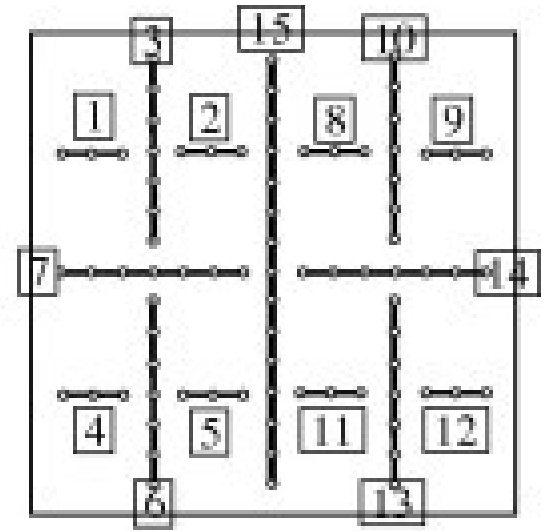
ND



One level



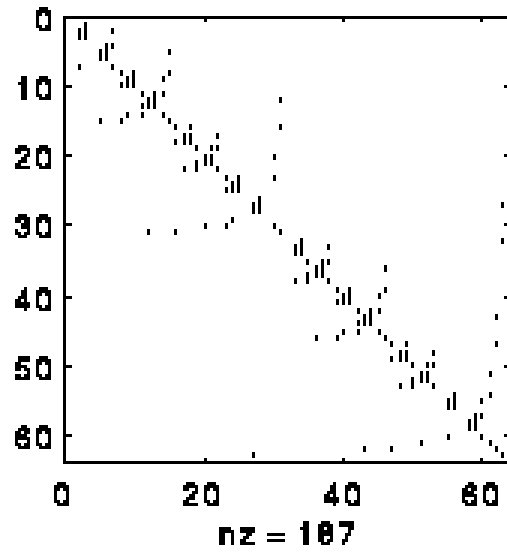
Two levels



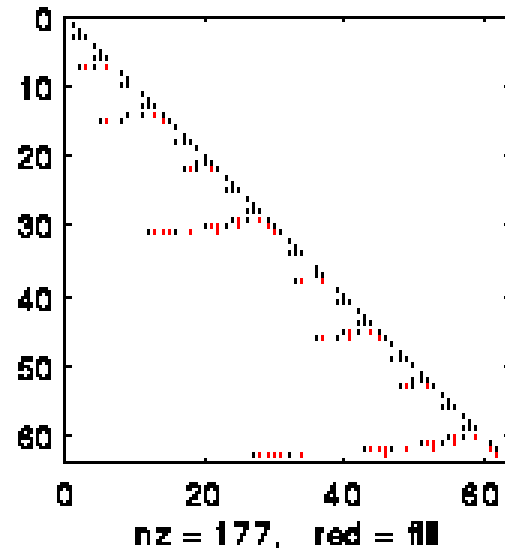
Ordering of separators

ND

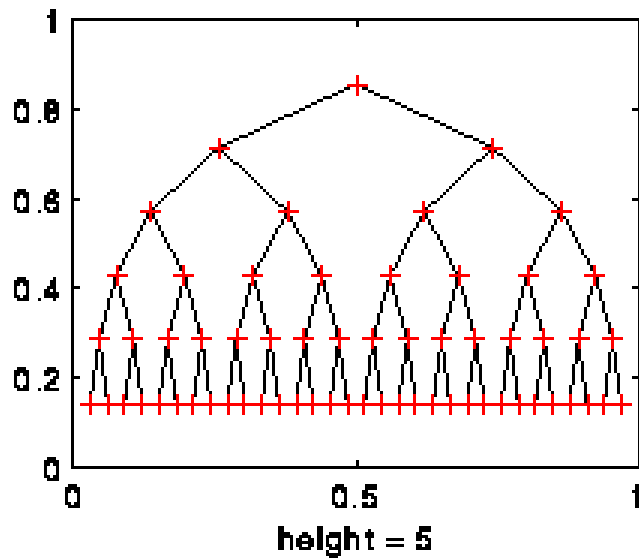
A after nested dissection



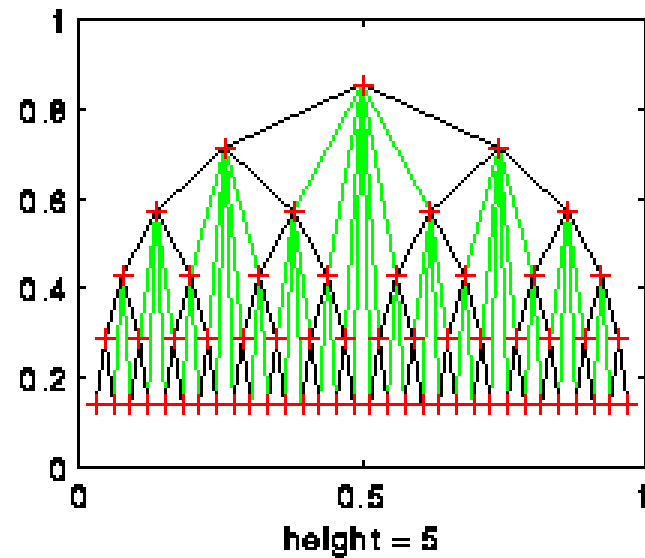
Cholesky factor, flops=509



Elimination tree



Graph of Cholesky factor



Факторизация и решение

$$A x = b$$

$$A = L U$$

$$L U x = b$$

$$U x = L' b$$

$$x = U' L' b$$

- L (Lower) и U (Upper)
нижне- и верхнетреугольные матрицы
- Решение с L – прямой ход
- Решение с U – обратный ход

// прямые методы

- Выбор pivot – не рассматриваем
- Заполнение не выходит за «профиль», но RCM не подходит
- ND или AMD – подходят!
- Распараллеливание на $p=2^q$ процессоров
- Окаймление – узкое место // -ти

// прямые методы = искусство упорядочивания

Технология разреженных матриц

- Координатный формат: (i, j, a)
- CSR (Compressed Sparse Row) формат
 - n //- количество строк
 - $ia[n+1]$, $ia[0]=0$, $ia[n]=nz$ //- указывает на начало и конец строки внутри $ja[.]$ и $a[.]$
 - $ja[nz]$ //- номера столбцов
 - $a[nz]$ //- элементы матрицы
- SS формат: $(nr, ir[nr], ia[nr+1], ja[nz], a[nz])$
- Блочный формат хранения $m*m$

CSR формат: задания

- MVM – умножение матрицы на вектор
- MPM – сложение разреженных матриц
- MT – транспонирование матрицы
- MMM – произведение разреженных матриц

Треугольные факторизации

Для прямых методов:

- Полное разложение: LU или LDU

Для итерационных методов:

- Неполное разложение $ILU(k)$
в фиксированную структуру $A^{(k+1)}$
- Приближенное разложение $ILU(\tau)$
с фильтрацией по порогу τ

$ILU(\tau)$

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} * d_{kk} * a_{kj}$$

$$d_{kk} = 1 / a_{kk}$$

- Фильтрация:
 - по позиции
 - по количеству элементов в строке
 - по значению (фильтрация малых элементов)
- Коррекция:
 - ведущего элемента
 - при фильтрации